ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2014

ΘΕΜΑ Α

Α1: σχολικό βιβλίο σελ. 251

Α2: σχολικό βιβλίο σελ. 273

Α3: σχολικό βιβλίο σελ. 150

Α4: $\begin{cases} \alpha \to \Lambda \\ \beta \to \Sigma \\ \gamma \to \Sigma \\ \delta \to \Sigma \\ \varepsilon \to \Lambda \end{cases}$

ΘΕΜΑ Β

Β1: Έστω $z = x + iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$ τότε

$$2|z|^2 + (z + \bar{z}) \cdot i - 4 - 2i = 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

άρα $z_1 = 1 + i$ ή $z_2 = 1 - i$

Β2:

$$w = 3 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3 \cdot \left[\frac{(1+i)^2}{1+1}\right]^{39} = 3 \cdot \left(\frac{2i}{2}\right)^{39} = -3i^3 = -3i$$

Β3: Με αντικατάσταση προκύπτει $|u - 3i| = 5$ άρα ο γεωμετρικός τόπος του u είναι κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1: Η συνάρτηση $h(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο συνάρτηση $h'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}>0 \Rightarrow h \nearrow$ και

$$h''(x)=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0 \Rightarrow h' \searrow \;\Rightarrow\; h(x) \text{ κοίλη στο } \mathbb{R}$$

Γ2:

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right)<\ln\left(\frac{e}{e+1}\right) \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right)<h(1) \overset{h\nearrow}{\Longleftrightarrow} 2h'(x)<1 \Leftrightarrow$$

$$h'(x)<\frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x)<h'(0) \overset{h'\searrow}{\Longleftrightarrow} x>0$$

Γ3: Ισχύει ότι $h(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)=\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)=\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$,και

$\dfrac{e^x}{e^x+1}<1 \Leftrightarrow e^x<e^x+1 \Leftrightarrow 0<1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $h(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

θέτω $\omega=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ τότε $\omega_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{\omega\to1}(\ln\omega)=0$$

Για την εύρεση ασύμπτωτης της C_h στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(h(x)\cdot\frac{1}{x}\right)=0\cdot0=0=\lambda \text{ και}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)-\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0=\beta$ η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

Για την πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{e^x}{e^x+1}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1}=1=\lambda$$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\left[h(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\ln\left(e^x+1\right)\right]=0=\beta$$ άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

Γ4: $\varphi(x)=e^x\cdot\left(h(x)+\ln 2\right)=e^x\cdot\left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)+\ln 2\right]=e^x\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)$ επίσης

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2e^x}{e^x+1}=1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

Ισχύει $\frac{2e^x}{e^x+1}>1\Leftrightarrow 2e^x>e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$ άρα $\varphi(x)\geq 0$ για $x\in[0,1]$. Το εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{E}=\int_0^1\varphi(x)\cdot dx=\int_0^1 e^x\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\cdot dx=\int_0^1\left(e^x\right)'\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\cdot dx=$$

$$=\left[e^x\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 e^x\cdot\frac{e^x+1}{2e^x}\cdot\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx=\text{............}=e+(e+1)\cdot\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1: Για $x\neq 0$ έχουμε $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1=f(0)$ άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$

Για $x\neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $G(x)=xe^x-e^x+1$. Η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $G'(x)=xe^x$

χ		0	
$G'(x)$	-		+
$G(x)$	↘		↗

Ο.Ε το $G(0)=0$

άρα $G(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x)\geq 0 \Rightarrow f \nearrow$

Δ2:

a) Η συνάρτηση $f(u)$ είναι συνεχής και αύξουσα , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα έχει Σύνολο Τιμών το $f(\mathrm{A})=(0,+\infty)$

Αν $2f'(x)>1$ τότε $\int_1^{2f'(x)} f(u)\cdot du>0$ άτοπο

Αν $2f'(x)<1$ τότε $\int_1^{2f'(x)} f(u)\cdot du<0$ άτοπο ,οπότε

$2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x)=f'(0) \overset{f'1-1}{\Longleftrightarrow} x=0$ γιατί

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\left(e^x-1\right)=0 \Rightarrow f'(0)=0$$

b) Ισχύει $y(t)=f(x(t))$, $t\geq0$ (1)

και $x'(t_0)=2y'(t_0)$ (2)

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς t τότε

$$y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)\overset{t=t_0}{\Longrightarrow} y'(t_0)=f'(x(t_0))\cdot x'(t_0)\Rightarrow\frac{x'(t_0)}{2}=f'(x(t_0))\cdot x'(t_0)\overset{x'(t)>0}{\Longrightarrow} f'(x(t_0))=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x(t_0))=f'(0)\overset{f'1-1}{\Longrightarrow} x(t_0)=0 \text{ τότε } y(t_0)=f(0)=1$$

Το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathrm{M}(0,1)$

Δ3: Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(xe^x-e^x-e\right)$

Θέτω $H(x)=xe^x-e^x-e$ έχει $H'(x)=xe^x>0 \Rightarrow H \nearrow$,για $x>0$

Εφαρμόζω ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO για την $H(x)$ στο διάστημα $[1,2]$ άρα υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (0,1)$ τέτοια ώστε $H(\rho)=0$

για $x<\rho \xRightarrow{H\nearrow} H(x)<H(\rho)=0$

για $x>\rho \Rightarrow H(x)>H(\rho)=0$

χ	0	1	ρ	2
$x-2$	-	-	-	+
e^x-e	-	+	+	+
$H(x)$	-	-	+	+
$g'(x)$	-	+	-	+
$g(x)$	↘	↗	↘	↗
	Τ.Ε.	Τ.Μ.	Τ.Ε	