ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελ. 31

Α.2 Σχολικό βιβλίο σελ. 22

Α.3 Σχολικό βιβλίο σελ. 86-87

Α.4

α)ΛΑΘΟΣ

β)ΣΩΣΤΟ

γ)ΛΑΘΟΣ

δ)ΛΑΘΟΣ

ε)ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Β.1 Έχουμε $(3x-1)\left(8x^2-6x+1\right)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$.

Τότε $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{4}$ και $x=\frac{1}{2}$.

Το σύνολο των λύσεων είναι το διατεταγμένο σύνολο $\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$.

Γνωρίζουμε ότι $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ και τα ενδεχόμενα είναι διαφορετικά ανά δυο.

Άρα $P(A\cap B)<P(A)<P(A\cup B)$.

Επομένως $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Έχουμε $9x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{2}{3}$, $x\in\left\{-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$.

Επειδή $P(\Gamma)\geq 0$ ισχύει $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

Β.2 $P(A'-B')=P\left(A'\cap(B')'\right)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ **(1)**

Όμως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}$

Άρα η **(1)** γίνεται $P(A'-B')=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Δ είναι $P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Β.3 $P(E)=P\left[(A\cap B')\cup(A'\cap B)\right]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{2}$

$=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}-\frac{6}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Β.4 Έστω ότι τα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα τότε

$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{5}{12}+\frac{8}{12}=\frac{13}{12}>1$

Άτοπο γιατί $P(B\cup\Gamma)\leq 1$, άρα τα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ 3^{O}

Γ1. Από δεδομένα ισχύει: $f_1\%=10$, $f_5\%=30$ και τα αντίστοιχα κέντρα είναι $x_1=9$, $x_2=11$, $x_3=13$, $x_4=15$, $x_5=17$

Αφού $\alpha_3=108^o$, $f_3=\frac{a_3}{360^o} \Leftrightarrow f_3=\frac{108^o}{360^o} \Leftrightarrow f_3=0,3$

Άρα $f_3\%=30$

Επίσης ισχύει

$f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100 \Leftrightarrow 10+f_2\%+30+f_4\%+30=100 \Leftrightarrow f_2\%+f_4\%=30$ (1)

$\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i f_i\%}{100} \Leftrightarrow 14=\frac{x_1 f_1\%+x_2 f_2\%+x_3 f_3\%+x_4 f_4\%+x_5 f_5\%}{100} \Leftrightarrow$

$1400=90+11f_2\%+390+15f_4\%+510$

$11f_2\%+15f_4\%=410 \quad (2)$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f_2\%=30-f_4\%$

Με αντικατάσταση στη (2) έχουμε

$11(30-f_4\%)+15f_4\%=410 \Leftrightarrow 330-11f_4\%+15f_4\%=410 \Leftrightarrow 4f_4\%=80$

Άρα $f_4\%=20$ και $f_2\%=10$

Γ2. Υπολογίζουμε το

$$s^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{(x_i-\overline{x})^2\cdot f_i\%}{100}=\frac{(9-14)^2\cdot 10+(11-14)^2\cdot 10+(13-14)^2\cdot 10+(15-14)^2\cdot 10+(17-14)^2\cdot 10}{100}\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{660}{100}\Leftrightarrow s^2=6,6$$

Έτσι $s^2=6,6 \Leftrightarrow s=\sqrt{6,6}\Leftrightarrow s\simeq 2,57$

$$CV=\frac{s}{|\overline{x}|}=\frac{2,57}{14}\simeq 0,184\Leftrightarrow CV=18,4\%$$

Επειδή $CV=18,4\%>10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει

$$\overline{x}=14\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot v_i}{v}=14\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot v_i+x_5\cdot v_5}{v}=14\Leftrightarrow\frac{1780}{v}+\frac{x_5\cdot v_5}{v}=14\Leftrightarrow\frac{1780}{v}+x_5\cdot f_5=14\Leftrightarrow$$

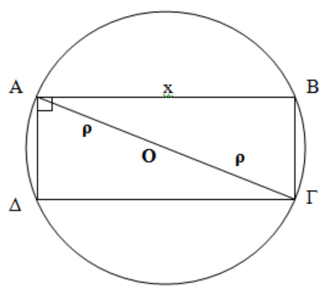
$$\frac{1780}{v}+17\cdot 0,3=14\Leftrightarrow\frac{1780}{v}=8,9\Leftrightarrow v=\frac{1780}{8,9}\Leftrightarrow v=200$$

Γ4. Επειδή $\beta_i=\dfrac{a_i-\overline{a}}{s_a}\Leftrightarrow\beta_i=\dfrac{1}{s_a}a_i-\dfrac{\overline{a}}{s_a}$ από την εφαρμογή 3 του σχολικού

βιβλίου στη σελίδα 99 ισχύει: $\overline{\beta}=\dfrac{1}{s_a}\overline{a}-\dfrac{\overline{a}}{s_a}=0$ και $s_B=\left|\dfrac{1}{s_a}\right|s_a=\dfrac{s_a}{s_a}=1$

<u>ΘΕΜΑ 4^{Ο}</u>

Δ.1



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Άρα εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα

$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2$. Άρα $\mathrm{A\Gamma} = 2\rho = 10$

$100 = x^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma} = \sqrt{100 - x^2}$

Πρέπει $100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10$ και $x > 0$. Άρα $x \in (0,10)$.

Τότε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου $E = AB \cdot B\Gamma = x\sqrt{100 - x^2}$, $x \in (0,10)$

Δ.2 Αφού $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $x \in (0,10)$

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x\frac{(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(100 - x^2) - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{50}$

	0	$5\sqrt{2}$	10
f'	+	-	
f	↗	↘	

Τότε για $x = 5\sqrt{2}$, $B\Gamma = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$. Άρα το ορθογώνιο τετράγωνο.

Δ.3 Παρατηρώ ότι $f(1) = \sqrt{100 - 1} = \sqrt{99}$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε

$$f'(1) = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{x}$$

$$f'(1) = \frac{98}{\sqrt{99}}$$

Άρα $\lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$

Δ.4 Γνωρίζουμε ότι $A - B \subseteq A$, $P(A-B) \le P(A)$,

Αφού $P(A)$, $P(A-B) \in [0,1]$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 5\sqrt{2})$ ισχύει

$$f\left(P(A-B)\right) \le f\left(P(A)\right) \Leftrightarrow$$

$$P(A-B) \cdot \sqrt{100 - P^2(A-B)} \le P(A) \cdot \sqrt{100 - P^2(A)}$$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \quad (1)$$

Ισχύει

$$0 < P(A-B) \le 1 \Leftrightarrow P^2(A-B) \le 1 \Leftrightarrow -P^2(A-B) \ge -1 \Leftrightarrow 100 - P^2(A-B) \ge 99$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{100 - P^2(A-B)} = \sqrt{99} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Επειδή $0 \le P(A) \le 1$ προκύπτει $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{99}} < 1$

Εν τέλει $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} < \dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} < 1$

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$ ισχύει

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$